



## Über die Dynamik von Schwertern

**S**s gibt zwei dominierende Modelle, die den Punkt bestimmen mit dem ein Schwert idealerweise im Ziel auftrifft. Ein Modell befasst sich mit den Biegeschwingungen eines Schwerts, besonders mit den Knoten der Grundschiwingung; der Knoten, der sich in der Nähe des Orts des Schwerts befindet, wird oft als *centre of percussion* bezeichnet. [1, 2] Das andere Modell, das auch Gegenstand dieser Arbeit ist, berücksichtigt Translation und Rotation als Komponenten der Bewegung eines starren Körpers [3] beim Auftreffen. Es gibt einige umfassende Artikel über die Dynamik des Schwerts als starrer Körper, so von Turner [4], Denny [5] und Le Chevalier [6]; für ein weiterführendes Verständnis der Bedeutung und der möglichen Anwendung der Analyse eines Schwerts auf der Grundlage der Dynamik starrer Körper werden diese Artikel sehr empfohlen. Die physikalischen Grundlagen sind seit dem 17. Jahrhundert bekannt. [7] Bereits in einigen historischen Quellen zum Fechten [8, 9] wird die Dynamik starrer Körper verwendet, um die Stelle zu beschreiben, mit der eine Hiebwaaffe idealerweise ihr Ziel trifft.

Dieser Artikel soll jenen als kurze Einführung dienen, die sich der Physik des Fechtens bislang nicht bewusst sind. Außerdem wird in diesem Artikel die Bedeutung des Trägheitsmoments für das Verhalten des Schwerts betont. Forscher und Hersteller sollen ermutigt werden, dieses grundlegende Maß, aus dem weitere Parameter berechnet werden können, zu bestimmen und anzugeben.

### 1 Bewegung des Schwerts

Zu jeder Zeit kann die Bewegung eines Schwerts als Überlagerung einer Rotation um eine Achse, einer Translation entlang einer Trajektorie und einer Vibration beschrieben werden. Da wir uns hier auf Treffer mit der Schneide beschränken, also den Gebrauch des Schwerts ohne signifikante Biegung, vernachlässigen wir die Vibration und betrachten das Schwert als ideal starren Körper. Jeder Körper hat einen Widerstand gegen eine Änderung der Translation, die Masse und gegen eine Änderung der Rotation, das Trägheitsmoment. Jede

Punktmasse  $m_i$  in der Entfernung  $r_i$  von der Rotationsachse hat ein Trägheitsmoment  $J_i = m_i r_i^2$ . Das gesamte Trägheitsmoment  $J$  ist die Summe der Trägheitsmomente seiner Teile:

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad (1)$$

Das Trägheitsmoment hängt nicht nur von der Massenverteilung des Körpers ab, sondern auch von der Lage des Körpers zu seiner Drehachse. Die Achse, für die das Trägheitsmoment am kleinsten ist, verläuft durch den Schwerpunkt und heißt dritte Hauptachse. Die dazu senkrechten Achsen, die die dritte Hauptachse im Schwerpunkt schneiden, sind die erste und die zweite Hauptachse. Die erste Hauptachse ist die Hauptachse mit dem größten Trägheitsmoment. Zudem hat die erste Hauptachse die größte Bedeutung für die Hiebbewegung des Schwerts. Zwar rotiert ein Schwert während eines Hiebs nicht notwendigerweise um die erste Hauptachse, jedoch üblicherweise um eine Achse, die parallel dazu verläuft. Für eine Achse, die parallel zu einer Achse durch den Schwerpunkt  $M$  liegt, für die das Trägheitsmoment  $J_M$  bekannt ist, kann das Trägheitsmoment  $J_x$  nach dem Satz von Steiner über den Abstand  $r_x$  zwischen der Rotationsachse und der parallelen Achse durch den Schwerpunkt bestimmt werden:

$$J_x = J_M + m r_x^2 \quad (2)$$

Es ist zu beachten, dass das Trägheitsmoment  $J_x$  umso größer ist, je weiter die Achse vom Schwerpunkt  $M$  entfernt liegt. Da das Trägheitsmoment den Widerstand gegen eine Änderung der Rotation beschreibt, bedeutet das, dass Waffen wie Streitäxte oder Streitkolben mit einem größeren Abstand zwischen Rotationsachse und Schwerpunkt im Allgemeinen schwieriger zu führen sind, aber auch schwieriger zu stoppen für die Rüstung des Gegners. Der größere Abstand zwischen der Rotationsachse und dem Schwerpunkt und das damit größere Trägheitsmoment bewirken auch den Unterschied zwischen einem Oberhau und einem Mordhau.

## 1.1 Das Schwert als physikalisches Pendel

Eine Punktmasse, die in einem homogenen Schwerfeld um eine Achse schwingen kann, heißt mathematisches Pendel. Im Gegensatz dazu wird ein ausgedehnter starrer Körper beliebiger Form, der in einem homogenen Schwerfeld um eine Achse schwingen kann, physikalisches Pendel genannt. Die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  eines mathematischen Pendels ist durch seine Länge  $l$  und die Fallbeschleunigung  $g$  definiert. Die Länge eines mathematischen Pendels, das mit derselben Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  wie ein physikalisches Pendel schwingt, heißt *reduzierte Pendellänge*  $l_r$ . Der Punkt, der sich  $l_r$  unterhalb der Aufhängung  $P$  des ruhenden physikalischen Pendels befindet, heißt *Schwingungsmittelpunkt*. In einem mathematischen Pendel fallen der Schwerpunkt und der Schwingungsmittelpunkt zusammen, während diese Punkte in einem physikalischen Pendel im Allgemeinen voneinander verschieden sind.

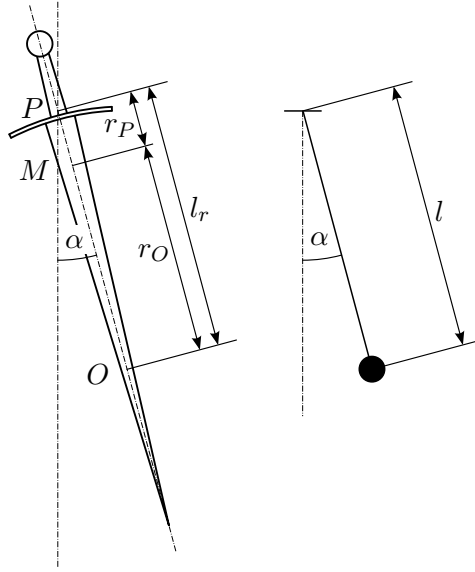


Abbildung 1: Das Schwert als physikalisches Pendel und ein mathematisches Pendel mit derselben Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$

### Reduzierte Pendellänge

Um die reduzierte Pendellänge und damit die Position des Schwingungsmittelpunkts zu bestimmen, verwenden wir den Energieerhaltungssatz. Ohne Reibung ist die Summe aus Rotationsenergie  $E_{\text{rot}}$  und potenzieller Energie  $E_{\text{pot}}$  konstant:

$$E_{\text{gesamt}} = E_{\text{rot}} + E_{\text{pot}} \quad (3)$$

Die Rotationsenergie ist  $E_{\text{rot}} = J_P \dot{\alpha}^2 / 2$  mit dem Trägheitsmoment  $J_P$  um die Achse  $P$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$ . Die potenzielle Energie einer Masse  $m$  im Schwerfeld mit einer Fallbeschleunigung  $g$  und einer Auslenkung  $\alpha$  ist  $E_{\text{pot}} = mgr_P(1 - \cos \alpha)$ , was für kleine Auslenkungen  $\alpha \ll \pi/2$  genähert werden kann als  $E_{\text{pot}} \approx mgr_P \alpha^2 / 2$ . Mit Gl. (3) ergibt sich damit:

$$E_{\text{gesamt}} = \frac{J_P}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{mgr_P}{2} \alpha^2 \quad (4)$$

Mit der Ableitung nach der Zeit  $t$  folgt daraus die einfache Schwingungsgleichung:

$$0 = J_P \ddot{\alpha} + mgr_P \alpha \quad (5)$$

Damit ist die Auslenkung  $\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$  mit der Amplitude  $\alpha_0$ , dem Phasenwinkel  $\varphi$  und der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr_P}{J_P}} \quad (6)$$

Ein mathematisches Pendel derselben Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  hat die Länge  $l = g/\omega_0^2$ . Daraus folgt mit Gl. (6) für die reduzierte Pendellänge, d. h. den Abstand zwischen Achse  $P$  und Schwingungsmittelpunkt  $O$

$$l_r = \frac{J_P}{mr_P} \quad (7)$$

Es kann gezeigt werden [3, 10], dass die Relation zwischen der Aufhängung  $P$  und dem Schwingungsmittelpunkt  $O$  symmetrisch ist. Ist also  $O$  der Schwingungsmittelpunkt zur Aufhängung  $P$ , so ist  $P$  auch der Schwingungsmittelpunkt zur Aufhängung  $O$ . Daher haben die Schwingungen um  $P$  und  $O$  auch dieselbe reduzierte Pendellänge  $l_r$  und dieselbe Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$ .

Ein mathematisches Pendel mit der reduzierten Pendellänge  $l_r$  eines physikalischen Pendels hat dieselbe Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  und kann – da die Eigenkreisfrequenz eines mathematischen Pendels nicht von seiner Masse abhängt – entweder dieselbe Masse oder dasselbe Trägheitsmoment wie das physikalische Pendel besitzen, im Allgemeinen jedoch nicht beides. Die Bewegung eines physikalischen Pendels hängt von drei Parametern ab, z. B. Masse  $m$ , Abstand  $r_P$  zwischen Aufhängung und Schwerpunkt und dem Abstand  $l_r$  zwischen Aufhängung und Schwingungsmittelpunkt. In einem mathematischen Pendel entarten  $r_P$ ,  $l_r$  und der Trägheitsradius  $R_g$  zur Pendellänge  $l$ . Da ein mathematisches Pendel über zwei Parameter definiert ist (Länge und Masse), kann es nicht jeden Aspekt eines physikalischen Pendels mit drei Parametern abbilden. Daher schlagen Turner [4] und Le Chevalier [6] Zweimassenmodelle vor, um die dynamischen Aspekte eines Schwerts zu beschreiben.

#### **Randbemerkung: Trägheitsradius**

Die reduzierte Pendellänge darf nicht mit dem *Trägheitsradius*  $R_g$  verwechselt werden. Der Trägheitsradius  $R_g$  ist definiert als die Distanz von der Achse  $P$ , in der sich die gesamte Masse  $m$  eines physikalischen Pendels befinden müsste, um einen Körper derselben Masse  $m$  und desselben Trägheitsmoments  $J_P$  wie das ursprüngliche physikalische Pendel zu bilden, das heißt

$$R_g = \sqrt{\frac{J_P}{m}} \quad (8)$$

und damit  $R_g^2 = r_P l_r$ . Der Trägheitsradius  $R_g$  charakterisiert die *Massenverteilung* um eine gegebene Achse  $P$ . Ersetzt man  $J_P$  mit  $mR_g^2$  in Gl. (6), so ergibt sich

$$\omega_0^2 = \frac{mgr_P}{J_P} = \frac{mgr_P}{mR_g^2} = \frac{gr_P}{R_g^2} \quad (9)$$

Damit hängt die Eigenfrequenz eines physikalischen Pendels nicht von der Masse selbst ab, sondern von der Massenverteilung, die durch den Trägheitsradius  $R_g$  beschrieben wird. Zwei homogene physikalische Pendel mit unterschiedlicher Dichte aber denselben geometrischen Abmessungen und äquivalenten Achsen haben dieselbe Eigenfrequenz.

## 1.2 Das Schwert und der Einschlag

Eine Kraft  $F$ , die an einem starren Körper an einer anderen Stelle als dem Schwerpunkt  $M$  angreift, kann ersetzt werden durch eine parallele Kraft  $F'$  desselben Betrags, die im Schwerpunkt  $M$  angreift und ein Drehmoment  $D'$  um den Schwerpunkt  $M$ . Betrachtet man ein Schwert als physikalisches Pendel mit der Aufhängung  $P$ , dem Schwingungsmittelpunkt  $O$ , der reduzierten Pendellänge  $l_r$  und der Masse  $m$ , dann kompensieren sich an der Stelle  $P$  die Beschleunigung  $a_{F'}$  durch die Kraft  $F'$  und die Beschleunigung  $a_{D'}$  durch das Drehmoment  $D'$ , wenn die Kraft  $F$  im Schwingungsmittelpunkt  $O$  angreift.

Die Beschleunigung  $a_{F'}$  durch die Kraft  $F'$  ist  $a_{F'} = F'/m$  in  $P$  ebenso wie in  $M$ . Die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\alpha}$  um den Schwerpunkt  $M$  durch das Drehmoment  $D' = Fr_O$  ist  $\ddot{\alpha} = D'/J_M = Fr_O/J_M$ . Die lineare Beschleunigung in der Aufhängung  $P$  durch  $\ddot{\alpha}$  ist  $a_{D'} = \ddot{\alpha}r_P = Fr_{Pr_O}/J_M$ . Das Trägheitsmoment  $J_M$  um den Schwerpunkt  $M$  kann nach dem Satz von Steiner (2) ausgedrückt werden als  $J_M = J_P - mr_P^2$ . Damit folgt

$$a_{D'} = \frac{Fr_{Pr_O}}{J_P - mr_P^2} \quad (10)$$

Nach Gl. (7) kann man  $J_P$  mit  $mr_P l_r$  ersetzen und erhält

$$a_{D'} = \frac{Fr_P(l_r - r_P)}{mr_P l_r - mr_P^2} = \frac{F}{m} = a_{F'} \quad (11)$$

Das bedeutet, dass ein Schwert, das mit dem Schwingungsmittelpunkt  $O$  trifft, beim Auftreffen keine Beschleunigung (aber ein Drehmoment) in die zugehörige Aufhängung  $P$  überträgt.

## 2 Messung

Wie oben gezeigt wurde, kann die Reaktion eines starren Körpers auf äußere Kräfte bestimmt werden, wenn die Masse  $m$ , der Schwerpunkt  $M$  und das Trägheitsmoment  $J$  bekannt sind. Ohne das Trägheitsmoment kann die Reaktion eines starren Körpers auf exzentrische Kräfte nicht bestimmt werden. Aus den Gleichungen (2) und (7) ist ersichtlich, dass das Trägheitsmoment aus der reduzierten Pendellänge berechnet werden kann und umgekehrt.

Turner [4] und Le Chevalier [6] schlagen den sogenannten *waggle test* als Methode zur Bestimmung der reduzierten Pendellänge  $l_r$  vor. Bei diesem Verfahren wird das Schwert locker an der Aufhängung gehalten und vorsichtig in Richtung der Schneiden geschüttelt. Der unbeschleunigte Punkt des Schwerts ist der entsprechende Schwingungsmittelpunkt. Trotz der ausführlichen Erklärungen der Autoren zur korrekten Ausführung des Verfahrens sollte bedacht werden, dass Präzision und Genauigkeit der Punktepaare von der Fähigkeit des Experimentators abhängen, ein Schwert ohne radiale Komponente zu schütteln und dabei den Punkt des wackelnden Schwerts zu identifizieren, der sich am wenigsten bewegt.

Das Trägheitsmoment ist nicht nur für die Dynamik von Schwertern von Bedeutung, sondern auch in der Automobilindustrie, bei der Vermessung von Golfschlägern und einigen

anderen Anwendungen. Zwar kann das Trägheitsmoment mit exakten Dichteangaben mit Hilfe von CAD numerisch bestimmt werden, jedoch reicht die Genauigkeit der Eingabewerte möglicherweise nicht aus, um das Trägheitsmoment hinreichend exakt zu berechnen. In solchen Fällen bietet es sich an, das Trägheitsmoment durch Messung zu bestimmen. Üblicherweise wird das Objekt dazu mit Hilfe eines trifilaren Torsionspendels oder eines Drehpendels mit Spiralfeder in harmonische Schwingung versetzt. Aus der Schwingungsdauer lässt sich dann das Trägheitsmoment des Objekts bestimmen. [10]

### 3 Zusammenfassung

Masse und Schwerpunktlage zusammen mit den geometrischen Abmessungen genügen nicht, um die Eigenschaften eines starren Körpers zu definieren. Forscher und Hersteller, die Hieb Waffen charakterisieren wollen, sollten ebenfalls das Trägheitsmoment für zumindest die erste Hauptachse oder eine dazu parallele Achse bestimmen, um brauchbare Daten zu erhalten, die die Bewegung der Waffe beschreiben. Das Trägheitsmoment kann mit Hilfe eines Drehpendels gemessen werden. [10]

Alternativ kann das Trägheitsmoment auch von der reduzierten Pendellänge hergeleitet werden (und umgekehrt), die ohne zusätzliche Ausrüstung mit dem *waggle test* bestimmt werden kann. Die Genauigkeit dieser Methode hängt jedoch sehr von den Fähigkeiten des Experimentators ab, weshalb dieses Verfahren vermieden werden sollte.

Im Kontext der Charakterisierung von Schwertern werden sowohl der ortseitige Schwingungsknoten als auch der Schwingungsmittelpunkt *centre of percussion* genannt. Um Verwechslungen zu vermeiden, sollten eindeutig bestimmte Begriffe verwendet werden wie *Schwingungsknoten* bzw. *Schwingungsmittelpunkt* zu einer bestimmten Achse.

| Zeichen          | Bedeutung  |
|------------------|--|
| $a$              | Beschleunigung   |
| $D, D'$          | Drehmoment   |
| $E_{\text{pot}}$ | potenzielle Energie  |
| $E_{\text{rot}}$ | Rotationsenergie   |
| $F, F'$          | Kraft  |
| $g$              | Fallbeschleunigung; Ortsfaktor                                   |
| $J_x$            | Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse $x$                       |
| $l$              | Länge eines mathematischen Pendels                               |
| $l_r$            | reduzierte Pendellänge; effective length [4]; dynamic length [6] |
| $m$              | Masse  |
| $M$              | Schwerpunkt; Massenmittelpunkt                                   |
| $O$              | Schwingungsmittelpunkt   |
| $P$              | Rotationsachse eines Pendels                                     |
| $R_g$            | Trägheitsradius  |
| $r_x$            | Abstand zwischen $x$ und dem Schwerpunkt                         |
| $t$              | Zeit   |
| $\alpha$         | Auslenkung   |
| $\dot{\alpha}$   | Winkelgeschwindigkeit  |
| $\ddot{\alpha}$  | Winkelbeschleunigung   |
| $\alpha_0$       | Amplitude  |
| $\pi$            | Verhältnis des Umfangs eines Kreises zum Durchmesser; 3,14159... |
| $\varphi$        | Phasenwinkel   |
| $\omega_0$       | Eigenkreisfrequenz   |

Tabelle 1: Notation

## Literatur

- [1] T. Laible. *Das Schwert – Mythos und Wirklichkeit*. 2. Aufl. Wieland Verlag, 2008.
- [2] H. Schmidt. *Vibration of the blade and how to use it*. Hroarr. 2014. URL: <http://www.hroarr.com/vibration-of-the-blade-and-how-to-use-it/>.
- [3] H. Vogel. *Gerthsen Physik*. 20. Aufl. Springer, 1999.
- [4] G. L. Turner. *Dynamics of Hand-Held Impact Weapons*. Association for Renaissance Martial Arts. 2002. URL: [http://armor.typepad.com/bastardsword/sword\\_dynamics.pdf](http://armor.typepad.com/bastardsword/sword_dynamics.pdf).
- [5] M. Denny. “Swordplay: an exercise in rotational dynamics”. In: *European Journal of Physics* 27.4 (Juli 2006), S. 943–950. DOI: 10.1088/0143-0807/27/4/025.
- [6] V. Le Chevalier. *A dynamic method for weighing swords*. Ensis Sub Caelo. 2010. URL: <http://www.subcaelo.net/ensis/weighing/weighing.pdf>.
- [7] C. Huygens. *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricæ*. F. Muguet, 1673.
- [8] A. Fehn. *Die Fechtkunst mit Stoß- und Hieb Waffen*. Carl Rümpler, 1851.
- [9] R. F. Burton. *The Book of the Sword*. Chatto & Windus, 1884.
- [10] T. Dorf Müller, W. T. Hering und K. Stierstadt. *Bergmann/Schaefer Lehrbuch der Experimentalphysik*. 11. Aufl. Bd. 1. Walter de Gruyter, 1998.